Zjednodušovanie pletív

Modelovanie kriviek a plôch (3)

Marcel Makovník

Department of Algebra and Geometry
Faculty of Mathematics, Physics and Informatics
Comenius University in Bratislava, Slovakia

Zjednodušovanie pletív – myšlienka

- Cieľom je zo vstupného **trojuholníkového** pletiva vyprodukovať trojuholníkové pletivo s menším počtom vrcholov, hrán a stien.
- Zjednodušenie je kontrolované kritériom kvality, ktoré zachováva zvolené vlastnosti pôvodného pletiva v čo najväčšej miere.

- Jednou z aplikácií zjednodušovania pletív je **nastaviteľnosť** úrovne detailu geometrických dát, čo umožňuje pristupovať ich k ďalšiemu spracovaniu ako ku škálovateľnej úlohe.

Zjednodušovanie pletív – algoritmy

- **Zhlukovanie vrcholov** (vertex clustering) – v lineárnom čase, avšak pletivá nižšej kvality.
- **Inkrementálna decimácia** – v najhoršom prípade v kvadratickom čase, avšak pletivá si lepšie zachovávajú svoju pôvodnú kvalitu.
- **Prevzorkovanie** (resampling) – najvšeobecnejšie (nová distribúcia vrcholov na pôvodnom pletive), výhodné pre ”multiresultion” reprezentácie.
- **Aproximácia pletiva** – minimalizuje zvolenú funkciu chyby.

Zhlukovanie vrcholov – postup

- Pre zvolený prah ε rozdelíme ohraničujúci priestor pletiva na bunky s priemerom ε.
- Pre každú bunku vypočítame reprezentatívny vrchol na základe informácie o vrcholoch (pletiva), ktoré sa v bunke nachádzajú (napr. ako ťažisko týchto vrcholov, prípadne ťažisko bunky).
- **Zhlukovací krok:** *stena pôvodného pletiva zdegeneruje, ak dva alebo tri jej vrcholy sa nachádzajú v jednej bunke.*
- Následne sa všetky zdegenerované steny odstránia.
- Alternatívne: Nech $\mathbf{p}$ je reprezentant pre vrcholy $\mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_n$ v klastri P a nech $\mathbf{q}$ je reprezentant pre vrcholy $\mathbf{q}_1, ..., \mathbf{q}_m$ v klastri Q. Potom vrcholy $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$ sú spojené hranou v decimovanom pletive, ak existovala hrana $(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j)$ v pôvodnom pletive pre nejaké i a j.

Zhlukovanie vrcholov – výpočet reprezentantov pre klastre

- Hoci ťažisko sa môže zdať ako priamočiary prístup pre výpočet reprezentanta, výsledky nie sú dostačujúce.
- Lepší sa ukazuje prístup, ktorý vyráta optimálnu pozíciu reprezentanta s využitím MNŠ.
- Minimalizovať budeme vzdialenosť reprezentanta od všetkých oporných rovín trojuholníkov, ktoré zasahujú do príšlušnej bunky. (prečo?)

Zhlukovanie vrcholov – výpočet reprezentantov pre klastre

- Označme $P_i = (\mathbf{x}_i, \mathbf{n}_i)$ opornú rovinu trojuholníka t_i, kde $\mathbf{x}_i$ je bod tejto roviny a $\mathbf{n}_i$ je jej **jednotkový** normálový vektor.
- pre $d_i = \mathbf{n}_i^\top \mathbf{x}_i$ môžeme vyrátať

$$\text{dist}^2(\mathbf{x}, P_i) = (\mathbf{n}_i^\top \mathbf{x} - d_i)^2$$

- Použitím homogénnych súradníc $\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, 1)$ a $\bar{\mathbf{n}}_i = (\mathbf{n}_i, -d_i)$ môžeme predošlú rovnicu prepísať ako

$$\text{dist}^2(\mathbf{x}, P_i) = (\bar{\mathbf{n}}_i^\top \bar{\mathbf{x}})^2 = \bar{\mathbf{x}}^\top \bar{\mathbf{n}}_i \bar{\mathbf{n}}_i^\top \bar{\mathbf{x}} =: \bar{\mathbf{x}}^\top \mathbf{Q}_i \bar{\mathbf{x}}.$$

- Všimnime si, že matica $\mathbf{Q}_i$ je symetrická matica 4×4.

Zhlukovanie vrcholov – výpočet reprezentantov pre klastre

- Následne, funkciu chyby dostaneme ako kvadratickú formu (elipsoid)

$$E(\mathbf{x}) = \sum_{t_i \in C} \bar{\mathbf{x}}^\top \mathbf{Q}_i \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}^\top \left(\sum_{t_i \in C} \mathbf{Q}_i \right) \bar{\mathbf{x}} =: \bar{\mathbf{x}}^\top \mathbf{Q} \bar{\mathbf{x}},$$

  kde t_i sú všetky trojuholníky, zasahujúce do klastra C.
- Túto funkciu štandardne nájdeme pod názvom **quadric error metric**.
- Optimálnu pozíciu reprezentanta $\mathbf{x}$ teda dostaneme riešením systému

$$\left(\sum_i \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i^\top \right) \mathbf{x} = \sum_i \mathbf{n}_i d_i.$$

Zhlukovanie vrcholov – porovnanie

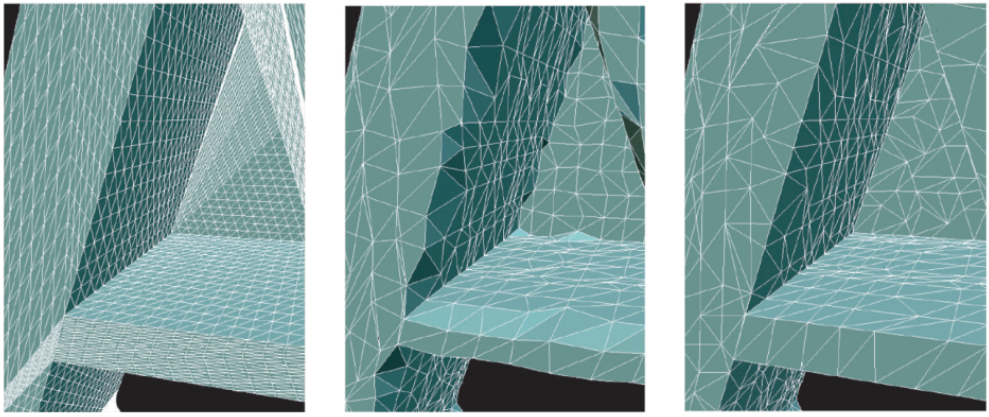


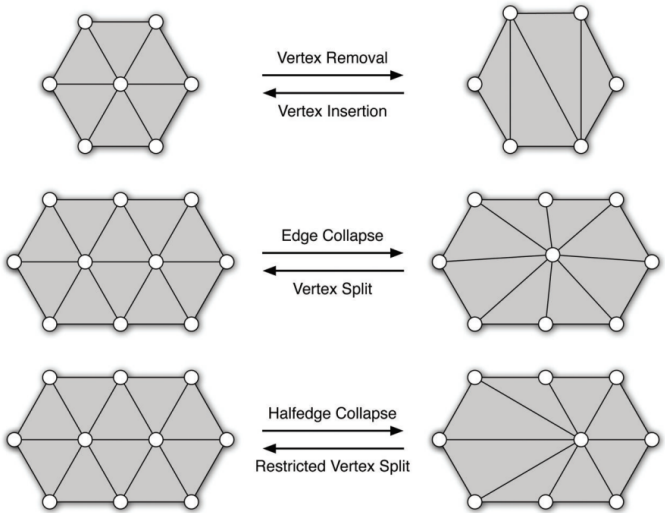
Figure 7.1. Different choices for the representative vertex when decimating a mesh using clustering: original (left), average (center), and quadric-based (right).

Inkrementálna decimácia

- Inkrementálne algoritmy v jednom kroku odstránia vždy iba jeden vrchol.
- V každom kroku, najlepší kandidát na odstránenie je určený na základe zvoleného kritéria:
  - **binárne** – vrchol sa môže alebo nesmie odstrániť
  - **spojité** – ako zmení kvalita pletiva po odstránení vrchola?
- Po každom odstránení vrchola, sa konektivita pletiva v jeho okolí zmení, čiže je potrebné kritérium kvality znovu ohodnotiť – toto je výpočtovo najnáročnejšia časť, preto sa na zachovanie poradia kandidátov na odstránenie používa **halda** (heap).

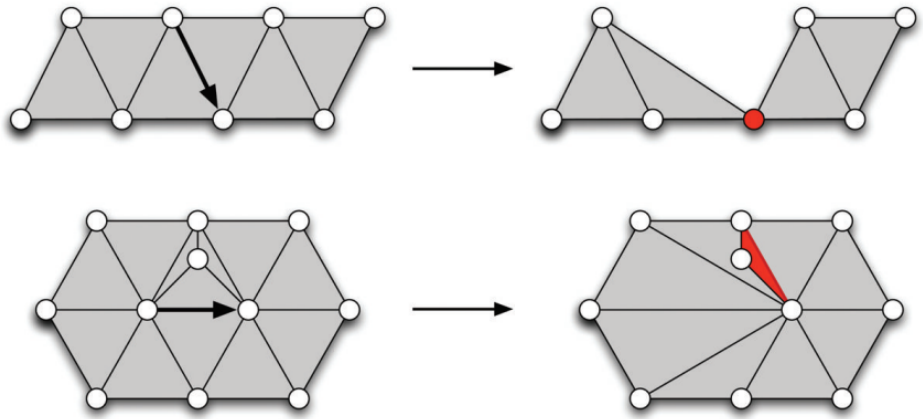
Inkrementálna decimácia – topologické operácie

- Ako sa zmení počet vrcholov, hrán a stien?
- Aký je rozdiel medzi zrútením hrany a polhrany?



Inkrementálna decimácia – nelegálne operácie

- Ak vrcholy $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$ sú hraničné, tak aj hrana $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ je hraničná.
- Pre všetky vrcholy $\mathbf{r}$, ktoré sú susedné s vrcholom $\mathbf{p}$ a súčasne $\mathbf{q}$, existuje trojuholník $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$.



Inkrementálna decimácia – meranie kvality

- Pre každý vrchol $\mathbf{p}$ vyrátame maticu $\mathbf{Q_p}$ rovnakým spôsobom, ako v prípade zhlukovania vrcholov (QEM), kde do výpočtu berieme oporné roviny trojuholníkov incidentných s vrcholom $\mathbf{p}$.
- Ak zrútime hranu medzi vrcholmi $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$ do vrchola $\mathbf{r}$, pre tento vrchol chybu akumulujeme, t. j. $\mathbf{Q_r} = \mathbf{Q_p} + \mathbf{Q_r}$.
- Pozíciu vrchola $\mathbf{r}$ dostaneme riešením analogického kvadratického programu $E(\mathbf{r})$.